Numerik Starschnitt
Lineare GS

Lösungen sind hier nur Näherungen (Rundungsfehler)

lineares GS
$Ax+b=0$
$A \in R^{n \times n}$, $x,b \in R^n$
x unabhängige Variable

Äuquivalenzoperationen
- Vertauschung der Zeilen
- Multi. einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null
- Addition eines Vielfachen einer Zeile mit einer anderen

Verfahren von Gauß (Gauß-Algo.)
Voraussetzung: A regulär
Wenn ein Diagonalelement der Matrix A null ist, müssen Zeilen getauscht werden. An dieser Permutationsmatrix P, die anfänglich 1 ist, werden die Permutaionen auch vorgenommen.

1. LR-Zerlegung: $P\,A = LR$
Ich multipliziere die 1. Zeile jeweils so (l_{i1}), daß bei Subtraktion mit der darunterliegenden Zeile links der Eintrag Null wird. Anschließend wiederhole ich diesen Elimationsschritt mit dem reduzierten System, d.h. usprüngliches GLS ohne 1.Zeile und linke Spalte.
Es entsteht eine Rechtsdreiecksmatrix R. Die Faktor l_{i1} werden in einer weiteren Matrix L gespeichert, so dass eine Linksdreiecksmatrix mit 1en in der Diagonale entsteht.

2. Vorwärtseinsetzen: $Lc-P\,b = 0$
Erst c_1 mit der 1. Zeile, dann c_2 mit der 2. ... bestimmen.

3. Rückwärtseinsetzen: $Rx+c = 0$
Erst x_n mit der n. Zeile, dann x_{n-1} mit der n-1. ... bestimmen.

Vorteil:
Nur einmal LR-Zerlegung für verschiedene Konstantenvektoren.

3

Pivotstrategien
1. <u>Diagonalstrategie</u>: A diagonaldominant (In jeder Zeile das Diagonalelement betragsgrößer ist als die Summe der Beträge der übrigen Zeilenelemente.) Keine Zeilenvertauschungen, Pivotelemente sind Diagonalelemente.
2. <u>Kolonnenmaximumsstrategie</u>: Durch Vertauschungen wird das betragsgrößte Element jeweils in die Diagonale gebracht.
3. <u>Skalierung der Matrix auf 1</u>: Durch Division der Zeilen mit der Summe der Beträge der Zeilenelemente sollen Rundungsfehler oder Stackoverflow verhindert werden. Nachteil: Bei jedem Eliminationsschritt nötig.
4. <u>relative Kolonnenmaximumsstrategie</u>: Pivotelement wird das Spaltenelement dessen Betrag in Relation zur Summe der Beträge seiner Zeilenelemente am größten ist.

Matrix**inversion**
X und B können auch Matrizen sein, s. d. sich die Inverse berechnen läßt mit B als Einheitsmatrix
$X := A^{-1}$ und $B := -1|$

3

Fehlerabschätzung
Genauigkeit einer Näherung x* berechnen.
Für <u>Residuenvektor</u>: $Ax^*+b = r$
und <u>Korrekturvektor</u> (Abweichung): $z = x-x^*$
gilt $Az+r = 0$.

<u>Relativer Fehler der Lösung</u> wird geschätzt durch
$$\frac{\| z \|}{\| x \|} \leqq \chi(A) \frac{\| r \|}{\| b \|}$$

wobei $\chi(A)$ die <u>Konditionszahl</u> der Matrix A bzgl. der verwendeten verträglichen Normen bezeichnet mit
$1 \leqq \| 1 \| = \| A A^{-1} \| \leqq \| A \| \|A^{-1} \| =: \chi(A)$.
Ein kleiner Residuenvektor wirkt sich also günstig aus.

Empfindlichkeit und Daumenregel
Wie stark beieinflußt die Störung der Ausgangsdaten die Lösung des LGS? Die Konditionszahl bestimmt, wie empfindlich die Lösung x gegenüber Änderungen ΔA und Δb ist.

Daumenregel: Wird ein LGS mit d-stelliger dezimaler Gleitkommarechnung gelöst und beträgt die Konditionszahl $\chi(A) \approx 10^{\alpha}$ dann sind wegen der Rundungsfehler der Ausgangsdaten nur $d-\alpha-1$ Dezimalstellen sicher.

Aus kleiner Konditionszahl folgt gute Approximation und somit keine Nachiteration nötig.

Kreisesatz von Gerschgorin
Die Konditionszahl der Matrix A bzgl. der Spektralnorm läßt sich abschätzen durch
$$\chi(A) = \frac{\max(\lambda_i)}{\min(\lambda_i)} \leqq \frac{\max\{3(hi+hi+1)\}}{\min\{hi+hi+1\}}$$
also dem Verhältnis von größter und kleinster Schrittweite.

Tridiagonales GS

Tridiagonel GS
werden mit dem Gauß-Algorithmus (Diagonalstrategie) gelöst, wobei der LR-Zerlung einfach durch Koeffizienten vergleich erfolgt.
L hat eine Nebendiagonale unten und R eine oben.

Bei Verwendung der rel. Kolonnenmaximusstrategie führt jede Zeilenvertauschung zur Verdopplung des Aufwandes. Die R ist nicht mehr bidiagonal.

5n-4

Cholesky-Verfahren
Voraussetzung: A symmetrisch und positiv definit
1. <u>Cholesky-Zerlegung</u>: Die Reduktion einer pos. def. quadratischen Form auf eine Summe von Quadraten leistet die (eindeutige) Produkzerlegung der zugehörigen Matrix A in $A = L L^T$
1.1 Bestimmung von L durch $l_{kk}=\sqrt{a_{kk}}$ und aus den Einträgen unterhalb der Diagonale in der k-te Spalte folgt $l_{ik} = a_{ik}^{(k-1)}/\sqrt{a_{kk}}$ für $i > k$
1.2 Reduziertes System bestimmen, d.h. k-te Spalte unterhalb der Diagonale nullen.
$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik}\, l_{jk}$ für $k < i$ und $j \leqslant n$
2. <u>Vorwärtseinsetzen</u> liefert c
$Ax+b=0$, $A=LL^T$ und $c:=-L^Tx$ liefern
$Lc-b=0$
Die erste Zeile dieses GS hat nur eine Unbekannte c_1, die zweite zwei c_1 und c_2 , ...
3. <u>Rückwärtseinsetzen</u> liefert x
$L^Tx+c=0$

Wegen der Ausnützung der Symmetrie ist das Verfarhen halb so aufwendig wie der Gauß-Algorithmus.

positiv definit
A (symmetrisch) heißt positiv definit, falls ihrer Quadratische Form pos. def. ist, d.h.
$Q(x) := x^T A\, x \geqq 0$ für alle $x \in R^n \setminus \{0\}$
$= 0$ für $x=0$
Dann hat A dei Eigenschaften
- Alle Diagonalelemente sind größer Null.
- Das Produkt zweier Diagonalelemente ist größer als das Quadrat des durch ihren Kreuzungspunkt definierten Matrixelementes.
- Pro Spalte steht das betragsgrößte Element in der Diagonale.

A ist genau dann pos. def., wenn
- sich der Gaußsche Eliminationsprozeß bei Diagonalstrategie mit n positiven Pivotelementen durchführen läßt.
- die Reduktion der quadr. Form Q(x) auf eine Summe von n Quadraten im Körper der reellen Zahlen vollständig durchführbar ist.

$Q(x) = \Sigma_{k=1 \text{ bis } n} [\, \Sigma_{i=k \text{ bis } n}\, l_{ik}\, x_i\,]^2$
mit $l_{kk}=\sqrt{a_{kk}^{(k-1)}}$ und $l_{ik}=a_{ik}^{(k-1)} / l_{kk}$
für alle $i=k+1,\ldots,n$
Daraus folgt eine reguläre Linbksdreiecksmatrix L mit positiven Diagonalelementen.

Bandmatrix
Matrix mit m besetzten Nebendiagonalen oben- und unterhalb der Diagonale.
Eine Cholesky-Zerlegung einer symm., pos. definiten Bandmatrix besitzt dieselbe Bandstruktur.

Aufwand $\leqslant$ 1/2 nm (m+3) + 2 n(m+1)

lineares GS
$Ax+b=y$
$A \in R^{n \times m}$, $x \in R^n$
$y,b \in R^m$
x unabhängige Variable
y abhängige Variable

Austausch-Schritt
y_p wird abhängige und x_q unabhängige Variable.
1. p-te lineare Funktion y_p nach x_q auflösen (Vorraussetzung: $a_{p\,q} \neq 0$)
2. Enthaltener Ausdruck in allen anderen Funktionen einsetzen.
Für ein entsprechendes Schema gilt:
- Pivotelement $a_{p\,q}$ wird reziprok
- Übrigen Elemente der Pivotzeile durch altes Pivotelement dividieren und Vorzeichen umkehren
- Übrigen Element der Pivotspalte durch Pivotelement teilen.
- Für alle übrigen Elemente gilt: Alter Wert des Elements plus Produkt aus dem alten Wert des in der gleichen Zeile stehenden Elements der Pivotkolonne und dem neuen Wert des in der gleichen Spalte stehenden Elements der Pivotzeile.

Matrix**inversion**
Die Inversion einer regulären, quadratischen Matrix A entspricht der Aufgabe, gegebene n lineare Gleichungen (y = Ax) nach den unabhängigen Variablen x_i (i=1,..,n) aufzulösen, s. d. gilt
$x = A^{-1} y$.
Durch eine Folge von AT-Schritten, in denen jeweils eine unabh. x-Variable gegen eine abh. y-Variable ausgetauscht wird, ist dies möglich.

Aufgrund der Verwandtschaft mit dem Gauß-Verfahren sind die gleichen Pivotstrategien anwendbar. Wegen Zeilenvertauschungen erhält man B und muß die Inverse noch berechnen mit $A^{-1} = B\, P_{n-1} P_{n-2} \ldots P_1$.

3