Numerik Starschnitt
Gewöhnliche Differentialgleichungen

Nur selten kann die gesuchte Lösung in geschlossener, analytischer Form angegeben werden, deshalb sind numerische Löungen unverzichtbar.

Fixpunktiteration
$x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$
k=0,1,2,...
z.B. $x = e^{-x}$ auf [0.5,0.6]

Die Fixpunktiteration (auch Methode der sukzessiven Approximation genannt) kann als Folgeglieder $x^{(k)}$ reele Zahlen, Vektoren oder auch Funktionen haben. F(x) ist eine Abb. der betreffenden Menge in sich selbst.
Ziel ist es die Fixpunktgleichung x = F(x) zu lösen. Die Lösung x ist der Fixpunkt der Abbildung F(x).

Banachscher Fixpunktsatz

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines Banach-Raumes B und F eine kontrahierende Abb. von A in A. Dann gilt
a) F besitzt genau einen Fixpunkt s aus A.
b) Für jeden Startwert $x^{(0)}$ konvergiert $x^{(k)}$ gegen s.
c) Fehlerabschätzung:

$||s-x^{(k)}|| \leqslant L^{k-l}/_{(1-L)} || x^{(l+1)} - x^{(l)} ||$ für $0 \leqslant l < k$

a priori Fehlerabschätzung für l=0
a posteriori Fehlerabschätzung für l=k-1

Lipschitz-stetig
Eine abgeschlossene Teilmenge A aus dem Banach-Raum B, die F von A in A abbildet, heißt lipschitz-stetig auf A mit der Lipschitzkonstante 0<L<oo, wenn gilt
$|| F(x)-F(y) || \leqslant L || x - y ||$ für alle x,y aus A
mit der Norm $||f||=\max_{x \in [a,b]} |f(x)|$
F heißt <u>kontrahierend</u> auf A, wenn L<1 gilt.
Praktische Bestimmung von L durch $L = \max_{x \in A} |F'(x)|$

Banach-Raum
Allen folgenden Betrachtungen wird ein Banach-Raum B zugrunde gelegt, ein reeller/komplexer Vektorraum auf dem eine Norm defniniert ist, s.d. in ihm jede <u>Cauchy-Folge</u> konvergiert und ihr Grenzwert in ihm liegt.

Satz von Picard-Lindelöf
Spezialfall des Fixpunktsatzes.

F(x,Y(x)) stetig in U

F(x,Y(x)) erfüllt die Lipschitzbedingung, dann existiert genau eine Lösung der AWA

alternative Lipschitz-Bedingung
Es reicht aus zuzeigen, dass die partiellen Ableitungen existieren und beschränkt sind.

Picardsche Iterationsverfahren

Iterationsvorschrift
$Y_{k+1}(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x,Y_k(s))\, ds$
In jedem Schritt findet eine formale Iterations statt.

Erstes Integral

Wenn z.B. keine exakte Löung bestimmt werden kann, dann ist man so in der Lage zumindest eine parametrisierte Löung bzw. eine Trajektorie anzugeben, durch Auflösung nach dt bzw. dx und anschliessendes Gleichsetzen.

Einschritt-Verfahren
$y_{j+1} = y_j + h\,\phi(x_j,y_j,h)$

In jedem Schritt findet eine numerische Integration durch eine Quadraturformel statt.

Runge-Kutta-Verfahren

explizite RK-Verfahren

Iterationsvorschrift
$y_{j+1}(x_{j+1}) = y_j(x_j) + \Sigma_{\mu=1}{}^{p}\, w_\mu k_\mu$
Parameter werden im Butcher-Schema notiert.

- Eulersche Polygonzugverfahren
- Verbesserte Polygonzugverfahren
- Euler-Cauchy-Verfahren
- klassische RK-Verfahren

Können im Gegensatz zu impliziten-Verfahren nur steife DGLs mit bestimmten Schrittweite noch numerisch Lösen.

steife DGL

a-stabil
$|R(z)| \leq 1$

implizite RK-Verfahren

Iterationsvorschrift
$y_{j+1}(x_{j+1}) = y_j(x_j) + \Sigma_{\mu=1}{}^{p}\, w_\mu k_\mu$
Parameter werden im Butcher-Schema notiert.

- Gauß-Legendre-Verfahren
- Radau-Verfahren
- Lobatto-Verfahren

Können im Gegensatz zu expliziten-Verfahren auch steife DGLs mit belieger Schrittweite noch numerisch Lösen.

Schrittweiten-steuerung

Fehlberg-Verfahren

Mehrschritt-Verfahren

explizite Mehrschritt-Verfahren
r+1-Schrittverfahren:
$y_{j+1} = y_j + h\,\phi(x_j,y_j,y_{j-1},..,y_{j-r},h)$

Adams-Bashforth

Predictor-Corrector-Verfahren (PECE)

implizite Mehrschritt-Verfahren
r+2-Schrittverfahren:
$y_{j+1} = y_j + h\,\phi(x_j,y_{j+1},y_j,..,y_{j-r},h)$

Adams-Moulton